

Prof. Mario Pent - Politecnico di Torino (Torino - Italy)

- Lezione n. 25: Sorgenti di informazione di tipo numerico
- Lezione n. 26: Sorgenti di informazione di tipo analogico (I)
- Lezione n. 27: Sorgenti di informazione di tipo analogico (II)
- Lezione n. 28: Trasmissione di segnali analogici per via numerica (I)
- Lezione n. 29: Trasmissione di segnali analogici per via numerica (II)
- Lezione n. 30: Trasmissione di segnali analogici per via numerica (III)
- Lezione n. 31: Il rumore degli apparati (I)
- Lezione n. 32: Il rumore degli apparati (II)
- Lezione n. 33: Il rumore degli apparati (III)
- Lezione n. 34: Trasmissione di segnali analogici - cenni (I)
- Lezione n. 35: Trasmissione di segnali analogici - cenni (II)
- Lezione n. 36: Applicazioni delle modulazioni analogiche (I)
- Lezione n. 37: Applicazioni delle modulazioni analogiche (II)
- Lezione n. 38: Trasmissione di simboli isolati (I)
- Lezione n. 39: Trasmissione di simboli isolati (II)
- Lezione n. 40: Trasmissione di simboli isolati (III)
- Lezione n. 41: Trasmissione di sequenze di simboli in banda base (I)
- Lezione n. 42: Trasmissione di sequenze di simboli in banda base (II)
- Lezione n. 43: Trasmissione di sequenze di simboli con modulazione (I)
- Lezione n. 44: Trasmissione di sequenze di simboli con modulazione (II)
- Lezione n. 45: Codifica di canale - cenni
- Lezione n. 46: Trasmissioni numeriche esempi di applicazioni (I)
- Lezione n. 47: Trasmissioni numeriche esempi di applicazioni (II)
- Lezione n. 48: Trasmissioni numeriche esempi di applicazioni (III)
- Lezione n. 49: Trasmissioni numeriche esempi di applicazioni (IV)

Prof. Paolo Ferri - Facoltà di Scienze - Udine

Lezione n. 1: Spiegazione di fenomeni di fisica

Lezione n. 2: Spiegazione di fenomeni di fisica

Lezione n. 3: Spiegazione di fenomeni di fisica

Lezione n. 4: Spiegazione di fenomeni di fisica

Lezione n. 5: Spiegazione di fenomeni di fisica

Lezione n. 6: Spiegazione di fenomeni di fisica

Lezione n. 7: Spiegazione di fenomeni di fisica

Lezione n. 8: Spiegazione di fenomeni di fisica

Lezione n. 9: Spiegazione di fenomeni di fisica

Lezione n. 10: Spiegazione di fenomeni di fisica

Lezione n. 11: Spiegazione di fenomeni di fisica

Lezione n. 12: Spiegazione di fenomeni di fisica

Lezione n. 13: Spiegazione di fenomeni di fisica

Lezione n. 14: Spiegazione di fenomeni di fisica

Lezione n. 15: Spiegazione di fenomeni di fisica

Lezione n. 16: Spiegazione di fenomeni di fisica

Lezione n. 17: Spiegazione di fenomeni di fisica

Lezione n. 18: Spiegazione di fenomeni di fisica

Lezione n. 19: Spiegazione di fenomeni di fisica

Lezione n. 20: Spiegazione di fenomeni di fisica

Lezione n. 21: Spiegazione di fenomeni di fisica

Lezione n. 22: Spiegazione di fenomeni di fisica

Lezione n. 23: Spiegazione di fenomeni di fisica

Lezione n. 24: Spiegazione di fenomeni di fisica

LEZ. 31 - IL RUMORE NEGLI APPARATI

IL RUMORE È UN DISTURBO CHE SI SOVRAPPONE AL SEGNALE CHE È STATO TRASMESSO; IL RUMORE È DOVUTO A FLUTTUAZIONI ALEATORIE DI ORIGINE NATURALE DI GRANDEZZE ELETTRICHE O ELETTROMAGNETICHE ALL'INTERNO DEL CANALE DI COMUNICAZIONE.

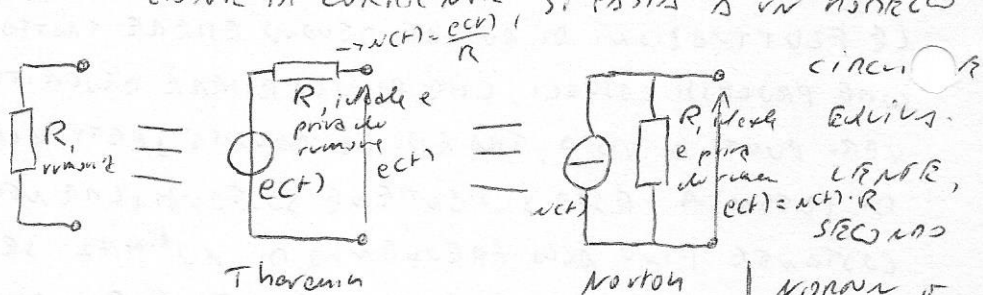
LE FLUTTUAZIONI DI RUMORE DEVONO ESSERE TRATTATE COME PROCESSI CASUALI, CHE POSSONO ESSERE DESCRITTI DA VARI PUNTI DI VISTA, TRA ESSI LA DENSITÀ SPETTRALE DI POTENZA. ESSA SI MANTIENE SOSTANZIALMENTE COSTANTE FINO ALLA FREQUENZA DI 10^6 MHz, SE NORMALIZZATA A UNA FREQUENZA $f_0 = 2kT/R$, DETTO RUMORE BIANCO.

IL RUMORE BIANCO PUÒ ESSERE NORMALIZZATO SOTTOFORMA DI CIRCUITI EQUIVALENTI, LA SITUAZIONE PIÙ SEMPLICE È QUELLA DI UN BIPOLO CHE CONTIENE AL SUO INTERNO UNA QUALCUN SORGENTE DI RUMORE.

TUTTE LE SORGENTI DI RUMORE, INDIPENDENTEMENTE DALLA LORO ORIGINE, VENLONO TRATTATE COME RUMORE TERMICO EQUIVALENTE, CHE È UNO STRUMENTO PER RAPPRESENTARE FORME DI RUMORE, ANCHE NON TERMICO.

SI PUO' COSTRUIRE UN MODELLO CIRCUITALE EQUIVALENTE DELLA SORLENTE DI RUMORE TERMICO, ATTRIBUENDO IL RUMORE AD UN GENERATORE EQUIVALENTE DI CORRENTE DI RUMORE, SECONDO NORTON, O SECONDO TIEVREMIN.

DATA LA RESISTENZA RUMOROSA R , QUINDI FONTE DI FLUTTUAZIONE DI CORRENTE SI PASSA A UN MODELLO



NEL CIRCUITO EQUIVALENTE SECONDO TIEVREMIN $e(t)$ E' UN GENERATORE EQUIVALENTE DI TENSIONE DI RUMORE; NEL CIRCUITO EQUIVALENTE SECONDO NORTON $i(t)$ E' UN GENERATORE EQUIVALENTE DI CORRENTE DI RUMORE

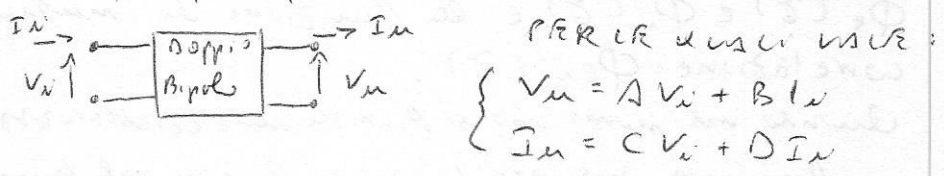
La densità spettrale del valore quadratico medio della tensione $e(t)$ vale:

$$G_e(f) = G_u(f) |H(f)|^2 = \frac{2kT}{R} \cdot R^2 = 2kTR$$

in cui $H(f) = R$ è la funzione di trasferimento che lega $e(t)$ e $i(t)$
 $G_u(f) = 2kT/R$ è la densità spettrale del valore quadratico medio della corrente

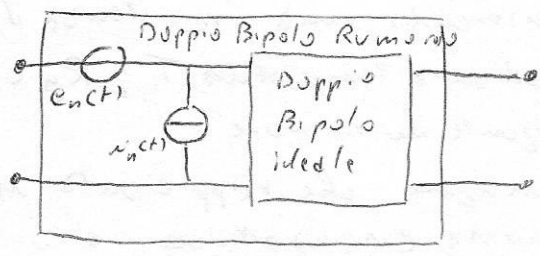
SE SI CONSIDERANO I DOPPI BIPOLI, ANCHE È POSSIBILE DETERMINARNE I CIRCUITI EQUIVALENTI.

UN DOPPIO BIPOLO È CARATTERIZZATO DA QUATTRO GRANDENZE: LA TENSIONE E LA CORRENTE AI PORTATI DI INGRESSO E DI USCITA, V_i, I_i, V_u, I_u , CHE NON SONO INDIPENDENTI MA



Dal punto di vista del rumore, lo stato elettrico del doppio bipolo è descritto da due generatori equivalenti di rumore, uno di tensione e uno di corrente,

posti ai morsetti di ingresso, che producono due processi correlati $e_n(t)$ e $i_n(t)$.



Per caratterizzare il doppio bipolo dal punto di vista

del rumore occorre caratterizzare i due processi correlati, sia statisticamente che spettralmente.

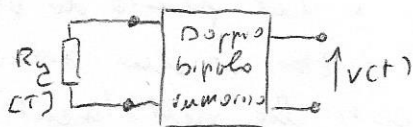
Si suppone che i due processi siano Gaussiani a valor medio nullo; questa rappresenta la caratterizzazione statistica.

Per la caratterizzazione spettrale occorre fornire gli spettri di potenza $G_e(f)$ e $G_n(f)$ e lo spettro di potenza mutua $G_{en}(f)$, oppure le funzioni di autocorrelazione $\Phi_e(\tau)$ e $\Phi_n(\tau)$ e la funzione di mutua correlazione $\Phi_{en}(\tau)$.

Quando nel primo caso si fornisce una caratterizzazione in frequenza, nel secondo caso si fornisce nel tempo.

Poiché risulta oneroso dal punto di vista dei calcoli operare come sopra descritto, si adotta un metodo più semplice per studiare il comportamento del bipolo, ma occorre considerare le condizioni all'ingresso del doppio bipolo, inserendo una "resistenza del generatore" R_g , ad una temperatura T ; R_g è anche essa una sorgente di rumore.

La situazione dunque, che rappresenta una caratterizzazione energetica, è:



$v(t)$, uguale all'uscita, è composto da due contributi:

- Il rumore prodotto da R_g e trasferito all'uscita
- Il rumore generato all'interno del doppio bipolo.

La densità spettrale della potenza disponibile all'uscita è

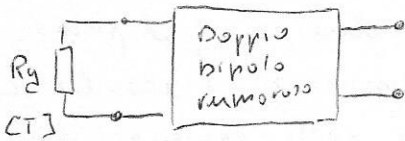
$$G_{du} = \frac{kT}{2} g_d + G_b$$

in cui $kT/2$ è la densità spettrale della potenza di rumore disponibile ai capi della resistenza R_g , che non dipende dal valore della resistenza; è lo stesso risultato ottenuto con i bipoli.

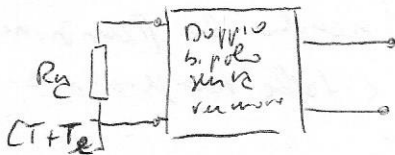
g_d è il guadagno disponibile ~~adattato~~ del doppio bipolo, è una caratteristica del doppio bipolo data dal rapporto fra la potenza disponibile all'uscita e la potenza disponibile all'ingresso;

G_b è la densità spettrale del rumore generato generato all'interno del doppio bipolo, è il contributo del rumore generato all'interno del doppio bipolo.

Dalla situazione reale



Si passa al termine di paragone



Il doppio bipolo senza rumore presenta una resistenza del generatore

con una temperatura incrementata di T_e , detta temperatura equivalente di rumore, la cui grandezza è scelta

in modo che all'uscita ci sia lo stesso rumore, lo stesso rumore, lo stesso rumore, lo stesso rumore.

T_e , temperatura equivalente di rumore del doppio bipolo, è un incremento virtuale della temperatura assoluta di R_g tale da mantenere invariata la potenza disponibile all'uscita. Dunque deve valere

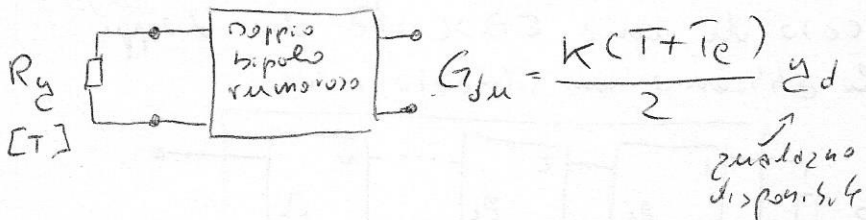
$$G_{du} = \frac{k(T + T_e)}{2} Z_d = \frac{kT}{2} Z_d + G_b$$

$$\text{Da cui } T_e = \frac{2G_b}{k g_d}$$

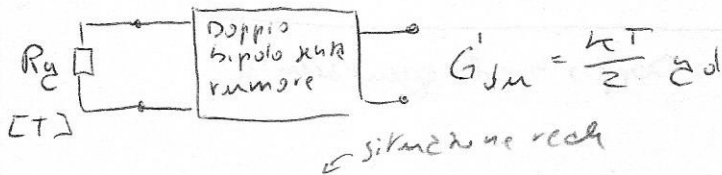
T_e rappresenta le caratteristiche di rumore del doppio bipolo; il valore di T_e dipende da R_g . È possibile ottimizzare R_g per la minima T_e , che può essere funzione della frequenza poiché non è una temperatura fisica ma è una temperatura equivalente.

Si può caratterizzare il rumore di un doppio bipolo confrontando le densità spettrali all'uscita dei due casi, il primo con un doppio bipolo rumoroso, il secondo con un doppio bipolo privato delle sorgenti di rumore interno. Il confronto consiste nel trovare il rapporto, delineando la funzione $g(CT)$, che dipende da T_e e dalla temperatura T delle resistenze in ingresso.

Caso reale



esperimento con attore



$$y(T) = \frac{G_{dm}}{G'_{dm}} = 1 + \frac{T_e}{T}$$

\leftarrow solo rumore all'ingresso

Calcolando il rapporto y per un valore di T convenzionale, $T_0 = 290\text{K}$ che è la temperatura ambiente, si ottiene

$$F = y(T_0) = 1 + \frac{T_e}{T_0}$$

in un F è detta Cifra di Rumore, che rappresenta dunque un modo alternativo per caratterizzare il rumore di un doppio bipolo, alla temperatura equivalente.

F ha le seguenti caratteristiche:

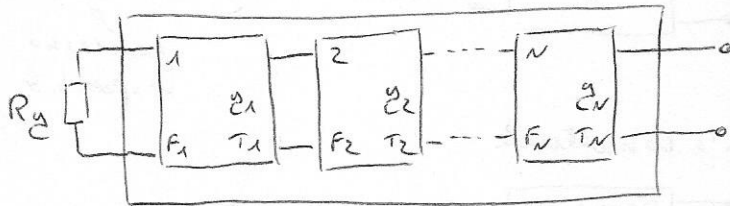
$$F \geq 1$$

F è una misura relativa del rumore (si può esprimere in dB)

$$T_e = (F - 1) T_0$$

$\leftarrow 290\text{K}$

Nel caso di una cascata di doppi bipoli abbiamo un situazione tipo



Doppio bipolo equivalente

I parametri da determinare sono:

1. Il guadagno disponibile y_T
2. La cifra di rumore F_T
3. La temperatura di rumore T_T

$$y_T = y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_N$$

$$F_T = \frac{G_{dm}}{G'_{dm}}$$

in cui $G'_{dm} = \frac{kT_0}{2} y_T$

$$e \quad G_{dm} = G'_{dm} + \sum_{i=1}^N G_{dm}^{(i)}$$

$$\text{con } G_{dm}^{(i)} = \frac{kT_i}{2} \cdot y_i \cdot y_{i+1} \cdot \dots \cdot y_N$$

per cui

$$F_T = \frac{G_{dm}}{G'_{dm}} = 1 + \sum_{i=1}^N \frac{G_{dm}^{(i)}}{G'_{dm}} = 1 + \frac{T_1}{T_0} + \frac{T_2}{T_0} \cdot \frac{1}{y_1} +$$

$$+ \frac{T_3}{T_0} \cdot \frac{1}{y_1 \cdot y_2} + \dots + \frac{T_N}{T_0} \cdot \frac{1}{y_1 \cdot y_2 \cdot \dots \cdot y_{N-1}}$$

Ed infine

$$F_T = F_1 + \frac{F_2 - 1}{z_1} + \frac{F_3 - 1}{z_1 z_2} + \dots + \frac{F_{N-1}}{z_1 z_2 \dots z_{N-1}}$$

Questa relazione è una relazione omogenea, con sole cifre di numero mentre quelle precedenti contengono cifre di numero e temperatura.

$$T_T = T_1 + \frac{T_2}{z_1} + \frac{T_3}{z_1 z_2} + \dots + \frac{T_N}{z_1 z_2 \dots z_{N-1}}$$

essendo $T = F - 1$

Si nota come il contributo di ogni doppio bipolo viene pesato con un coefficiente pari all'inverso del guadagno degli elementi che lo precedono.

Si deduce che in una catena di amplificazioni, il contributo totale di rumore è determinato dai primi stadi, mentre gli ultimi forniscono un contributo trascurabile.

LEZ. 33 - IL RUMORE NEGLI APPARATI

Vengono trattati alcuni esempi: linee con perdite più amplificazione, una ripartizione in tratte di un sistema di comunicazione su linee.

IL RUMORE di ANTENNA

È costituito da rumore cosmico e da rumore da assorbimento atmosferico.

Il primo ha origine nello spazio profondo dalla radiazione emessa da gas ionizzati, con densità molto basse e dipende dal puntamento dell'antenna e dalla frequenza, proporzionalmente a un fattore $f^{-2.5}$.

Si definisce Temperatura di antenna T_d la temperatura a cui portere un resistore per generare la stessa potenza di rumore captata dall'antenna. Si può dire perché entrambi hanno la stessa statistica (Gaussiani), assimilabile a rumore termico.

La temperatura operativa rappresenta tutto il rumore dovuto alle sorgenti interne ed esterne al ricevitore.

$$T_{op} = T_d + T_e$$

↳ equivalenti di rumore

MODELLO di CANALE con RUMORE ADDITIVO

RUMORE a BANDA STRETTA

ROBERTS & COMPANY, INC. NEW YORK

ROBERTS & COMPANY, INC.

LEZ. 34 TRASMISSIONE SEGNALI ANALOGICI
(CERNI)

LETTER FROM THE DIRECTOR OF THE
BUREAU OF LAND MANAGEMENT

LEZ. 35 - TRASMISSIONE di SEGNALI ANALOGICI
(CRAM)

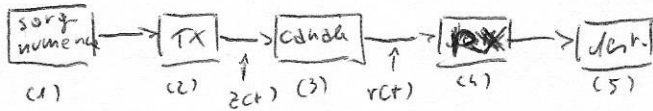
LES. 36 -

Case 37-

LEZ. 38 - TRASMISSIONI NUMERICHE

TRASMISSIONE DI SIMBOLI ISOLATI

Lo schema concettuale su come trasmettere l'informazione numerica è il seguente



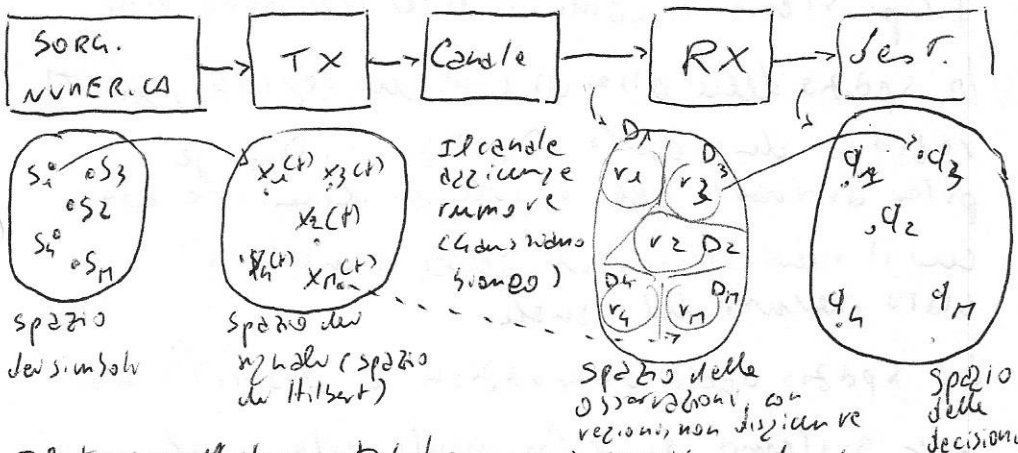
- 1) La sorgente numerica produce simboli nel tempo, ogni simbolo è composto da n bit, con 2^n stati logici e a una velocità di R_b bit/s
- 2) Il trasmettitore produce un segnale $z(t)$ addito al canale; $z(t)$ contiene informazioni sul simbolo (stato logico) dello sorgente
- 3) Il canale richiede un ingresso dei segnali
- 4) Il ricevitore estrae da $r(t)$ l'informazione sul simbolo trasmesso

Lez. 38 - TRASMISSIONI NUMERICHE

TRASMISSIONE DI SIMBOLI ISOLATI - I

È la casistica più semplice da analizzare, con esempio pinde del caso di trasmissione di 1 bit, con relativo calcolo dell'errore, ovvero aver deciso (nel ricevitore) di aver ricevuto un simbolo, mentre in realtà il simbolo ricevuto è un altro.

Lo schema concettuale di come trasmettere l'informazione numerica è:



Il trasmettitore stabilisce una corrispondenza biunivoca tra s_i e $x_i(t)$; il canale stabilisce una corrispondenza fra ciascun $x_i(t)$ e una regione $r_i = r(t) | s_i$ dello spazio delle osservazioni.

Il ricercatore, per decidere sul simbolo trasmesso, suddivide lo spazio delle osservazioni in M regioni D_m per le loro disgiunte.

Nello spazio delle decisioni vengono riportati i risultati delle decisioni prese dal ricercatore.

Esiste una analogia strutturale tra lo spazio dei simboli e lo spazio delle decisioni, così come esiste tra lo spazio dei segnali e lo spazio delle osservazioni.

Il problema è come il ricercatore suddivide lo spazio delle osservazioni in regioni, in M regioni disgiunte D_1, D_2, \dots, D_M per poter arrivare alle regioni di decisione così che il ricercatore decida quale simbolo è stato ricevuto dal canale.

Lo spazio delle osservazioni è descritto da un sistema di riferimento ortogonale con N_d dimensioni, ^{per rappresentare i punti di} i cui versori sono i segnali ortonormali $v_1(t), v_2(t), \dots, v_{N_d}(t)$.

Dato un segnale $z(t)$, le sue coordinate

z_n ($n=1, \dots, Nd$) sono esprimibili come

$$z_n = (z(t), v_n(t)) \quad \text{, prodotto scalare} \Rightarrow \text{coordinate } n\text{-esima di } z(t).$$

Il segnale ricevuto nell'ipotesi di aver trasmesso

$$\text{il simbolo } s_k \text{ è: } r(t) \mid s_k = x_k(t) + n(t)$$

Le coordinate: $\begin{matrix} \text{segnale} \\ \text{trasmesso} \end{matrix} \leftarrow \begin{matrix} \text{rumore Gaussiano} \\ \text{bidirezionale con densità} \\ \text{spettroale pari } N_0/2 \end{matrix}$

$$r_n \mid s_k = x_{k,n} + n_n \quad \text{con}$$

$$x_{k,n} = (x_k(t), v_n(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} x_k(t) v_n^*(t) dt$$

$$n_n = (n(t), v_n(t)) = \int_{-\infty}^{\infty} n(t) v_n^*(t) dt \quad \leftarrow \text{variabili casuali} \\ \text{Gaussiane}$$

n è un processo casuale, con variabili casuali

Gaussiane, a media nulla, varianza = $N_0/2$ e

statisticamente indipendenti.

A questo punto è calcolabile la densità di probabilità di $r_1, r_2, \dots, r_{Nd} \mid s_k$, ovvero

$$f(r_1, r_2, \dots, r_{Nd} \mid s_k) = \dots$$

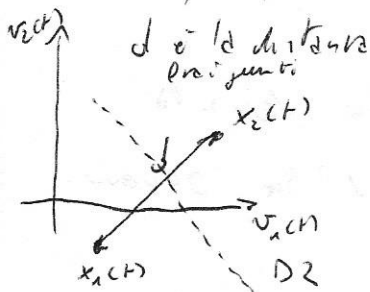
che dipende dal quadrato delle distanze tra $r(t)$ e $x_k(t)$

Da per la regola di decisione, per cui, avendo ricevuto il segnale $r(t)$, occorre individuare il simbolo s_k che rende max le probabilità a posteriori $P(s_k | r)$, il che è dato dalla minimizzazione di $d^2(r, x_k)$.

Per cui la regola di decisione prevede che si decida per il simbolo s_k e cui corrisponde il segnale $x_k(t)$ più "vicino" a $r(t)$ (distanza minima) misurata nello spazio delle osservazioni.

Struttura dei regletti nel caso binario

$M = 2$; $n = 1$
numero di segnali ; numero di bit



È interessante notare che, in un effetto del rumore, si riceve un segnale che porta ad una decisione errata, allora si può stabilire le condizioni che può portare alla decisione sbagliata, dipendentemente dalla

componente del rumore che sta nella retta congiungente $x_1(t)$ e $x_2(t)$.
 Se tale componente è della v_n , allora l'errore si verifica se: $v_n > d/2$

$P_{cer} = \frac{1}{2} \text{Erfc} \left(\frac{d}{2\sigma_n} \right)$, in cui d è la distanza tra i punti e σ_n è la densità del rumore.

LEZ. 39 TRASMISSIONE DI SIMBOLI ISOLATI II

La probabilità di errore, nel caso binario, in cui il numero di segnali M è pari a 2 e il numero di bit n è pari a 1, dipende solo dalla distanza d fra i punti, quindi dalla loro posizione relativa

$$P(e) = \frac{1}{2} \operatorname{Erfc} \left(\frac{d}{2\sqrt{N_0}} \right) \quad \text{nel caso binario, } M=2 \\ n=1$$

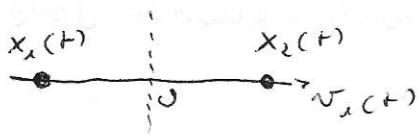
d è la distanza fra i punti
 N_0 è la densità spettrale

Dal punto di vista ingegneristico, nei sistemi di trasmissione numerici, la probabilità di errore viene espressa in termini dell'energia media dei segnali, oltre che delle caratteristiche del rumore.

L'energia media è il contenuto energetico del segnale, e rappresenta l'energia che deve essere spesa per poter realizzare e ottenere una certa qualità della trasmissione.

L'energia media dipende dalla disposizione geometrica dei segnali nello spazio dei segnali, quindi occorre analizzare le disposizioni geometriche più comuni utilizzate, caso per caso.

Quando nel caso binario, detto antipodale per la simmetria delle costellazioni rispetto all'origine, il numero delle dimensioni N_d è pari a 1, i segnali sono $x_1(t)$ e $x_2(t)$, con un valore $v_1(t)$



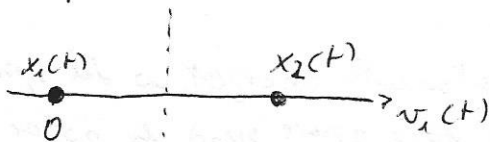
Caso binario antipodale
 $N_d = 1$

$$E = \left(\frac{d}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{d}{2\sqrt{N_0}} = \sqrt{\frac{E}{N_0}}$$

\downarrow
 media

, quindi $P(e) = \frac{1}{2} \text{Erfc}\left(\sqrt{\frac{E}{N_0}}\right)$,
 in cui compare il rapporto
 tra energia E e densità
 spettrale N_0

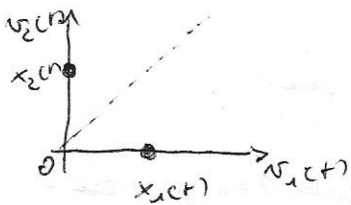
Nel caso binario unipolare, con una delle posizioni dei due punti in cui uno coincide con l'origine e quindi è un segnale nullo, abbiamo:



$$E = \frac{d^2}{2} \Rightarrow \frac{d}{2\sqrt{N_0}} = \sqrt{\frac{E}{2N_0}}$$

, quindi $P(e) = \frac{1}{2} \text{Erfc}\left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}}\right)$

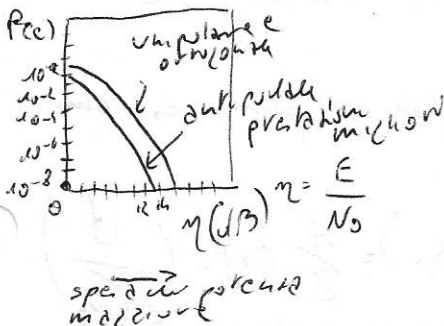
Nel caso binario ortogonale il numero delle dimensioni N_d è 2, quindi lo spazio è rappresentato da 2 vettori. I due punti sono di solito posti in modo simmetrico sui due assi.



$$E = \frac{J^2}{2} \Rightarrow \frac{J}{\sqrt{N_0}} = \sqrt{\frac{E}{2N_0}} \quad \text{quindi}$$

$$P_{ce} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\sqrt{\frac{E}{2N_0}} \right)$$

Da risultati ottenuti possiamo ricavare dei diagrammi che esprimono le prestazioni in termini di probabilità di errore in funzione di parametri energetici

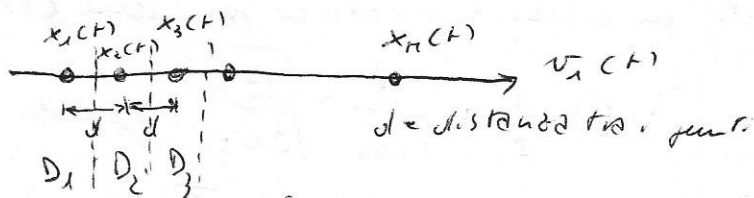


Il risultato ottenuto è anche giustificato dal fatto che la geometria antipodale, che offre prestazioni migliori, è di tipo simplex, con baricentro nell'origine.

Casi di strutture di segnali unidimensionali, $N_d = 1$, con un numero di bit superiore a 1, $n > 1$. Il numero di bit è quello trasmesso per ogni simbolo.

Essendo uno spazio unidimensionale tutti i punti vengono rappresentati su un unico asse.

C'è quindi un unico vettore $v_{\perp}(t)$; di solito la distribuzione dei punti è equiprobata.



Sulle basi della geometria possiamo stabilire le regioni di decisione, basate sulla regola della minima distanza tra punti.

Stabilire le regioni di decisione possiamo calcolare la probabilità di errore nel simbolo, ovvero la probabilità che il simbolo ricevuto sia diverso da quello trasmesso.

La casistica si divide per i punti estremi e quelli interni ad essi.

~~PCE~~ $PCE(s_i) = PCE(s_n) = \frac{1}{2} \operatorname{Erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{N_0}}\right)$
che è la stessa ottenuta nel caso binario.

$$PCE(s_i) = \operatorname{Erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{N_0}}\right) \text{ per } i \neq 1, M$$

Tenendo conto dell'equiprobabilità di trasmissione dei simboli, abbiamo che

$$PCE = \frac{M-1}{M} \operatorname{Erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{N_0}}\right) \rightarrow \text{Probabilità che il simbolo ricevuto sia errato}$$

Affinche i sistemi siano comparabili si introduce il concetto di probabilita' di errore equivalente sul bit.

Quindi, per comodita' di confronto si usa la probabilita' di errore di un canale binario simmetrico che produce la stessa probabilita' di errore osservata su un insieme di n bit, che e' la probabilita' di errore sul bit, invece che sul simbolo.

$$\text{Si ha: } P(\text{E}) = 1 - [1 - P(\text{ce})]^n \approx n P(\text{ce})$$

\uparrow simbolo \uparrow bit

Dunque

$$P(\text{ce}) = \frac{2^n - 1}{n - 2^n} \operatorname{Erfc} \left(\frac{d}{2\sqrt{N_0}} \right)$$

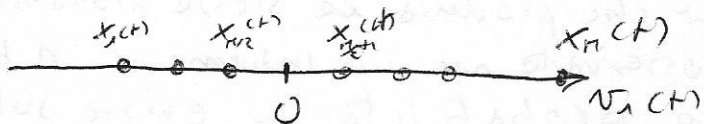
In quest'ultima relazione e' stato sostituito M , numero di punti, con il numero di bit, 2^n .

Oltre a questa trasformazione di rappresentazione della probabilita' di errore, ce n'e' un'altra in funzione del contenuto energetico, per cui la probabilita' di errore, di norma, viene espressa in funzione dell'energia media per bit E_b , oltre che delle caratteristiche del rumore. Per fare questo occorre conoscere l'energia media per simbolo, E_s , che dipende dalla disposizione

geometrica dei segnali nello spazio dei segnali
 vale la relazione

$$E_s = \frac{E_s}{n}$$

Nel caso equiprobabile, utile alle metodologie
 per il calcolo di E_s , abbiamo quanto segue.



La distribuzione
 dei punti è
 simmetrica
 rispetto
 all'origine

L'energia media per simbolo E_s , è:

$$E_s = \sum_{i=1}^n p_i E_i \quad \text{Energia i-esimo simbolo} = d_i^2$$

o probabilità del simbolo i-esimo = $\frac{1}{M}$

per cui $E_s = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n d_i^2$, in cui d_i è la distanza
 del simbolo i-esimo dall'origine.

Le distanze dei singoli simboli dall'origine sono:

$$d_1 = - \left[\frac{d}{2} + \left(\frac{M}{2} - 1 \right) d \right] = - \frac{d}{2} (M-1)$$

e per tutti gli altri:

$$d_i = d_1 + (i-1)d = d \left(1 - \frac{M+1}{2} \right)$$

Per $i=M$, l'ultimo punto, $d_M = -d_1$, etc. per
 Abbiamo, dunque: simmetriche

$$E_s = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^n d_i^2 = \dots = \frac{d^2 (M^2 - 1)}{12}$$

e, poiché $M=2^h$, abbiamo $E_s = \frac{d^2 (2^{2h} - 1)}{12}$

L'energia media per bit è, dunque:

$$E_b = \frac{d^2(2^{2n} - 1)}{12n}$$

Per cui

$$P(e) = \frac{2^n - 1}{n \cdot 2^n} \operatorname{Erfc} \left(\sqrt{\frac{3n}{2^{2n} - 1}} \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$$

che sarà tradotta in un diagramma.

La probabilità di errore nel bit, un punto su dell'energia per bit permette il confronto tra sistemi diversi, con geometrie diverse e bit per simboli diversi.

Nel caso unipolare a 4 livelli



$$E_s = \frac{d^2(2^n - 1)(2^{n+1} - 1)}{6}$$

$$E_b = \frac{d^2(2^n - 1)(2^{n+1} - 1)}{6n}$$

$$P(e) = \frac{2^n - 1}{n \cdot 2^n} \operatorname{Erfc} \left(\sqrt{\frac{3n}{2(2^n - 1)(2^{n+1} - 1)}} \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$$

Pce)

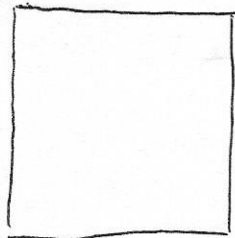
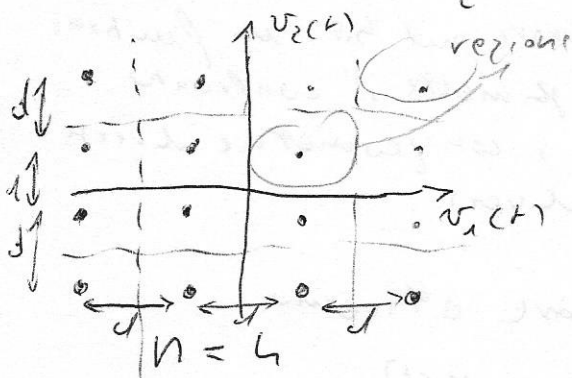
 $\eta(A|B)$

Diagramma relativo
alle Pce)

$$\eta = \frac{E_b}{N_0}$$

Strutture di segnali bidimensionali
sono reticolari regolari



$$N_d = 2$$

$$n = 2k$$

I 16 punti dei
segnali sono disposti
in un reticolo a
maglia quadrata
centrato intorno
all'origine.

I punti sono equispaziati,
con d = distanza tra
segnali adiacenti.

Le regioni di decisione sono ottenute,
facilmente, usando gli assi dei vettori
posti a $d/2$ dai vari punti.

Ci sono regioni chiare e opache.

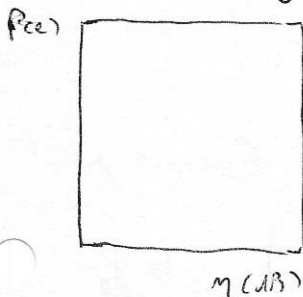
La probabilità di errore è, in questo caso:

$$P_{ce} = \frac{4(2^{n/2} - 1)}{n \cdot 2^{n/2}} p - \frac{4}{n} \cdot \frac{(2^{n/2} - 1)^2}{2^n} p^2$$

$$\text{con } p = \frac{1}{2} \operatorname{Erfc}\left(\frac{d}{2\sqrt{N_0}}\right)$$

Inoltre, l'energia per simbolo E_s e l'energia per bit E_b , valgono:

$$E_s = \frac{\sigma^2 (2^n - 1)}{6} \Rightarrow E_b = \frac{\sigma^2 (2^n - 1)}{6n}$$



Diagramma

$$\eta = \frac{E_b}{N_0}$$

η (dB)

Per strutture multidimensionali, in generale non è possibile trovare espressioni in forma chiusa per la probabilità di errore.

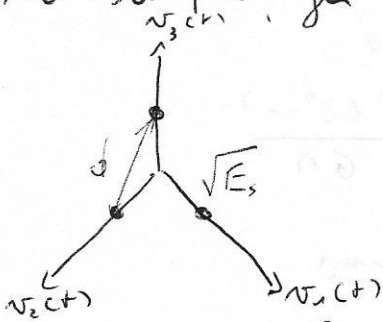
Si può invece ricavare un limite superiore valido per il caso generale.

$$P(e) \leq \frac{2^n - 1}{2n} \operatorname{Erfc} \left(\frac{d_{\min}}{2\sqrt{N_0}} \right)$$

\leftarrow union bound
 \leftarrow densità spettrale

Nel caso di strutture di segnali ortogonali, con $N_d = M = 2^n$, caratterizzate dall'avere un simbolo η ciascuna dimensione, quindi, se vogliamo, un punto η ciascuna dimensione. Tutti i segnali (punti) hanno la stessa distanza dall'origine e hanno la stessa energia E_s .

Ad esempio, per $M=3$



$$d = \sqrt{2}E_s = \sqrt{2n}E_b = d_{\min}$$

$$P(e) \leq \frac{2^n - 1}{2n} \text{Erfc} \left(\sqrt{\frac{n}{2}} \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$$

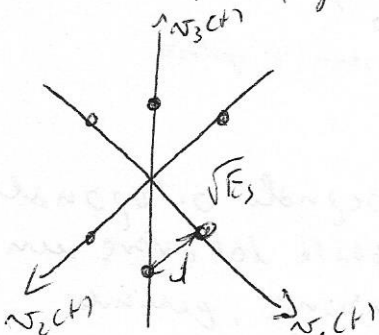
Energie per bit
densità spettrale

Strutture di segnali biortogonali in cui $N_d = M/2 = 2^{n-1}$, con due simboli per ciascuna dimensione.

Tutti i segnali hanno la stessa energia E_s .

Ad esempio, per $M=6$; ogni punto, sull'asse c_1 è simmetrico all'altro punto.

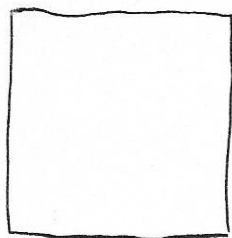
Questa è una struttura simplex, per la presenza di tutti le simmetrie.



$$d = \sqrt{2}E_s = \sqrt{2n}E_b = d_{\min}$$

$$P(e) \leq \frac{2^n - 1}{2n} \text{Erfc} \left(\sqrt{\frac{n}{2}} \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$$

Pce)



$n(Nd)$

$$\eta = \frac{E_b}{N_0}$$

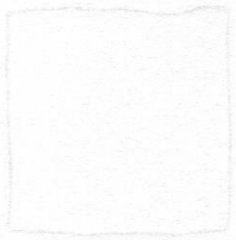
Confronto

- Si sceglie un valore di $Pce) = 10^{-6}$
- Si indice con η^* il valore di η necessario per ottenere tale $Pce)$
- Si costruiscono i diagrammi di η^* in funzione del rapporto n/Nd

Dai diagrammi si ricavano le opportune considerazioni, tra cui quelle che le strutture simplex sono quelle da cui si ottengono le migliori prestazioni.

Inoltre η^* decresce, e quindi occorre minor energie, al crescere di Nd .





1000
1000
1000

Confronto

- 2. scegliere un valore di ϵ
- 2. trovare un δ tale che $|f(x) - f(x_0)| < \epsilon$ quando $|x - x_0| < \delta$
- 2. costruire una δ dipendente da ϵ in funzione del tipo di f

Da dimostrare: trovare la δ opportuna
 in un'intervallo di x tale che
 questo δ sia ϵ sufficientemente
 piccolo.

Invece di trovare δ per un ϵ fissato
 conviene di cercare ϵ per un δ fissato.

